Formelsammlung Mathematik, Kant. Berufsmaturität, Profil Dienstleistungen

Inhalt:

Visum: ....

1. Vergleichszeichen

$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist grösser als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist grösser oder gleich b

2. Bruchrechnung

2.1. Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$ Kürzen „übers Kreuz“ erlaubt!

2.2. Division (Doppelbrüche)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$ Bei der Multiplikation Kürzen „übers Kreuz“ erlaubt!

2.3. Addition und Subtraktion

2.3.1. Gleichnamige Brüche

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

2.3.2. Ungleichnamige Brüche

Zuerst durch Erweitern gleichnamig machen, z.B.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

3. Proportionalität

Proportionalität liegt dem Dreisatz zugrunde.

3.1. Direkte Proportionalität

$\frac{y}{x} = m = \text{konst.}$, Beispiel: x = Anzahl kg Äpfel, m = Kilopreis, y = Preis von x kg.

3.2. Indirekte Proportionalität

$x \cdot y = s = \text{konst.}$, Beispiel: x = Geschwindigkeit, y = Zeit, s = Strecke

4. Bruchgleichungen (Lösungsvariable im Nenner)

Definitionsmenge und kgV aller Nenner bestimmen. Schreibweise für Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{ \ldots.. \}$ mit Werten von x, für welche Nenner gleich null werden, in den geschweiften Klammern.
Den Hauptnenner bestimmen und alle Bruchterme auf den Hauptnenner erweitern. Den Hauptnenner kann man danach weglassen. Lösungen, die aus der Gleichung ohne Hauptnenner berechnet werden, müssen in der Definitionsmenge enthalten sein. Andernfalls müssen sie als Scheinlösungen zurückgewiesen werden.
Bei einer Gleichung mit nur je einem Bruchterm auf beiden Seiten kann man auf beiden Seiten den Kehrwert nehmen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

5. Ungleichungen

5.1. Beispiele: $a > b$, $a < b$, $a \neq b$, $a \geq b$, $a \leq b$

5.2. Auflösen

Zulässige Schritte sind

- Beidseitige Addition oder Subtraktion derselben Grösse
- Beidseitige Multiplikation oder Division mit einer eindeutig positiven Grösse

Bei beidseitiger Division mit einer eindeutig negativen Grösse, z.B. -1 müssen Zeichen wie > „umgedreht“ werden. Multiplikationen oder Divisionen mit Grössen ohne eindeutiges Vorzeichen sind unzulässig. Dies gilt häufig für Faktoren, welche die Lösungsvariable enthalten, z.B. $(x - 2)$.

6. Bruchungleichungen (Lösungsvariable im Nenner)

Bruchungleichung so umformen, dass auf einer Seite 0 steht und ein einziger Bruch auf der anderen Seite. Dann Bestimmung der Lösung anhand der Vorzeichen von Zähler und Nenner, sowie den Vorzeichenregeln der Division.

7. Binomische Formeln

1. Binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

8. Textgleichungen

8.1. Zahlenrätsel

Bruch (Quotient) = $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$

Zweiziffrige Zahl:

x = Einerziffer, y = Zehnerziffer $\rightarrow$ Zahl = $10 \cdot y + x$ und Quersumme = $x + y$

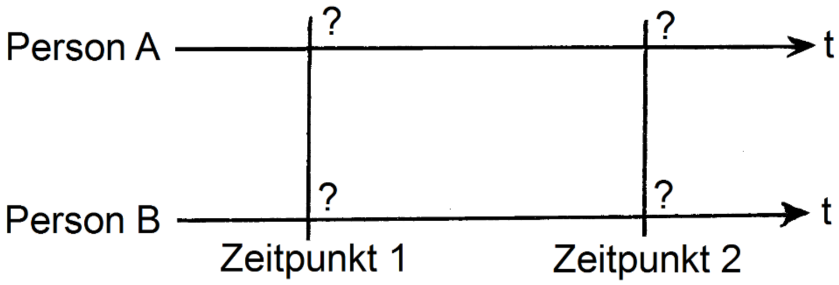
Reziproker Wert: Bruchterm: $\frac{b}{a}$ ist der reziproke Wert von $\frac{a}{b}$

Zahl: $\frac{1}{a}$ ist der reziproke Wert von a

8.2. Altersrätsel

Beispiel für zwei Personen:

Für beide Personen Zeitachsen zeichnen



Der Aufgabentext beinhaltet meist zwei Zeitpunkte und zwei Verknüpfungen. Eine Verknüpfung wird verwendet, um nur eine, anstatt zwei Variablen zu verwenden und die andere um eine Gleichung für die verbleibende Variable aufzustellen.

8.3. Mischungsrechnung

Mengen: m_1 und m_2

Ausprägung: c_1 und c_2 (im Sinne einer Konzentration, einem Kilopreis u.s.w.)

Gewichtetes Mittel: $c_M = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2}$

Erweiterung auf drei oder mehr Portionen ist offensichtlich.

8.4. Arbeit und Leistung

Zwei Personen oder Maschinen A und B:

$\frac{\text{Arbeitszeit A}}{\text{Zeit A allein}} + \frac{\text{Arbeitszeit B}}{\text{Zeit B allein}} = 1$

Bei der Zeit im Nenner handelt es sich jeweils um die Zeit zur Verrichtung der gesamten Arbeit für eine Person (oder Maschine) allein. Die Erweiterung auf eine grössere Anzahl Personen ist offensichtlich. Erweiterung auf drei oder mehr Personen ist offensichtlich.

8.5. Jahreszins und Marchzins

Z: Zins
Z_M: Marchzins
K: Kapital (Kontostand)
p: Zinssatz (ohne %!)
t: Zeit in Tagen

Jahreszins: $Z = \frac{K \cdot p}{100}$, $K = \frac{100\,Z}{p}$, $p = \frac{100\,Z}{K}$ Endkapital: $K_E = K + Z = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Marchzins: $Z_M = \frac{K \cdot p \cdot t}{36'000}$, $K = \frac{36'000\,Z_M}{p \cdot t}$, $p = \frac{36'000\,Z_M}{K \cdot t}$, $t = \frac{36'000\,Z_M}{K \cdot p}$

Endkapital: $K_E = K + Z_M = K \cdot \left(1 + \frac{p \cdot t}{36'000}\right)$

8.6. Verteilung eines verzinsten Guthabens K auf zwei Konten

Kontostand: x und $K - x$

Zinssatz: p_1 (für x) und p_2 (für $K - x$)

Gesamtzins $= Z = Z_1 + Z_2 = \frac{x \cdot p_1}{100} + \frac{(K - x) \cdot p_2}{100}$

8.7. Änderung des Kostenanteils infolge Änderung der Anzahl Beitragszahler

Änderung Beitrag $= D = B_{neu} - B_{vorher} = \frac{G_{neu}}{A_{neu}} - \frac{G_{vorher}}{A_{vorher}}$, G = Gesamtkosten, A = Anzahl Beitragszahler, B = individueller Beitrag

Falls $G_{neu} = G_{vorher}$ gilt $A_{neu} \cdot B_{neu} = A_{vorher} \cdot B_{vorher}$

8.8. Verteilungsrechnung

B_n: Beitrag „Investition"

A_n: Anteil „Gewinn"

Fortlaufende Proportionen: $A_1 : A_2 : A_3 : \ldots\ldots = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots\ldots$

Verhältnisse: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \ldots\ldots = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots}{B_1 + B_2 + B_3 + \ldots\ldots} = k =$ konstant

9. Potenzregeln

a^x: Potenz

a: Basis (es gilt meist $a > 0$, ausgenommen für ganzzahlige Exponenten)

x: Exponent

Definition: $a^0 = 1$

Multiplikation und Division bei gleicher Basis:

Multiplikation: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Division: $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Multiplikation und Division bei gleichen Exponenten:

Multiplikation: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Division: $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

Negative Exponenten:

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ und $\frac{1}{a^{-x}} = a^x$

Potenzen können unter Vorzeichenwechsel vom Zähler in den Nenner und umgekehrt überführt werden.

Potenz einer Potenz:

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Wurzeln als Potenzen:

Quadratwurzel: $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{½}$

Allgemein: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-1/n}$, $n \in \mathbb{N}$

Rationale Exponenten:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ und $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-m/n}$

Wurzeln multiplizieren und dividieren:

$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y} \rightarrow x^{1/n} \cdot y^{1/n} = (x \cdot y)^{1/n}$

$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \rightarrow x^{1/n} : y^{1/n} = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/n}$

Wurzel und Potenzen:

$x^a \cdot \sqrt[n]{x^m} = x^{a + (m/n)}$

Nenner mit Wurzel rational machen (durch Erweitern mit einer Potenz)

$\frac{a}{b \cdot \sqrt[2]{c}} = \frac{a \cdot \sqrt[2]{c}}{b \cdot \sqrt[2]{c} \cdot \sqrt[2]{c}} = \frac{a \cdot \sqrt[2]{c}}{b \cdot c}$

Potenzen mit negativer Basis und ganzzahligen Exponenten: Es gilt

$(-a)^n = -a^n = (-1) \cdot a^n$ wenn n ungerade, d.h. $\{n\} \in \{ \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots \}$

und

$(-a)^n = a^n$ wenn n gerade, d.h. $\{n\} \in \{ \ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots \}$

9.1. Potenzgleichungen

Grundform und Lösung: $x^a = c \rightarrow x = c^{1/a} = \sqrt[a]{c}$

Durch Anwendung von Potenzregeln Potenzen zu einer einzigen Potenz zusammenfassen. Danach obige Umformung.

10. Lineare Gleichungen mit Parametern (Fallunterscheidung)

Bei linearen Gleichungen kann es sein, dass für bestimmte Werte des Parameters die "Anzahl x" gleich null wird. Z.B. bei der Gleichung $a \cdot x = 2x + 3$ erhält man zunächst $x \cdot (a - 2) = 3$. Für $a = 2$ ist die "Anzahl x" gleich null, d.h. es folgt eine verbotene Division durch null. Bei der Lösung $x = 3 / (a - 2)$ sollte man daher vermerken "für $a \neq 2$".

11. Geradengleichungen

Normalform

$g: \ y = m \cdot x + q, \ x \in \mathbb{R}$

m: Steigung

q: y-Achsenabschnitt

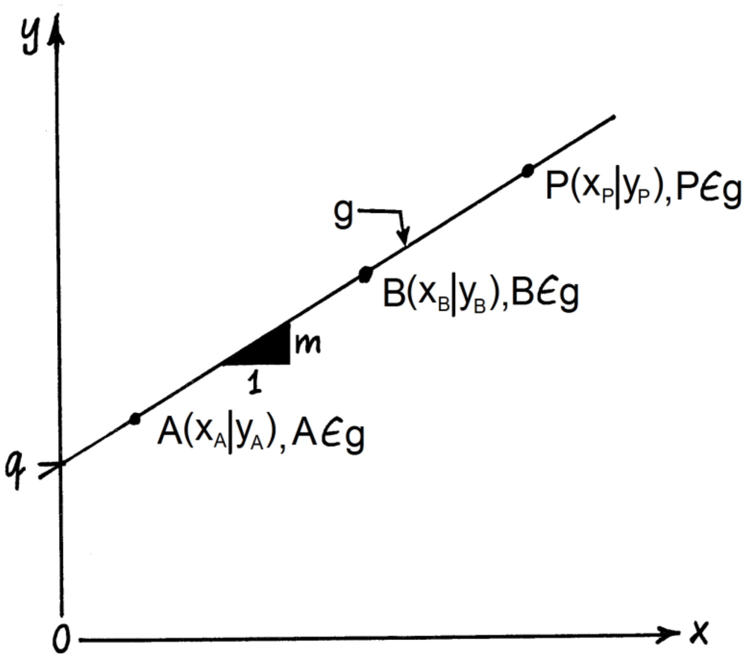
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (Steigungsformel)

Koordinatengleichung

$g: a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

"Spezielle" Geraden:

$g: y = q$ horizontale Gerade
$g: x = c$ vertikale Gerade



Zwei-Punkte-Form

$$g: y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + \frac{x_B\, y_A - x_A\, y_B}{x_B - x_A} \ , \ A(x_A | y_A) \text{ und } B(x_B | y_B), \{A,B\} \in g$$

d.h. für $g: y = mx + q$ gilt $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ und $q = \dfrac{x_B\, y_A - x_A\, y_B}{x_B - x_A}$

Punkt-Steigungs-Form (Geradenbüschel)

$g: y = m \cdot (x - x_P) + y_P$, $P(x_P | y_P)$, $P \in g \rightarrow g: y = m \cdot x + y_P - m \cdot x_P$

oder $g: y = m \cdot x + y_P - m \cdot x_P$

11.1. Punktprobe bei Geraden

Es geht darum festzustellen, ob ein Punkt $P(x_P|y_P)$ auf einer Geraden g liegt. Man setzt die Koordinaten x_P und y_P von P in die Geradengleichung ein (y_P für y und x_P für x). Resultiert eine wahre Aussage, z.B. 3 = 3, so gilt $P \in g$. Resultiert hingegen eine falsche Aussage, z.B. –7 = 7, so gilt $P \notin g$.

11.2. Inverse Punktprobe bei Geraden

Ein Punkt $P(x_P|y_P)$ soll auf einer Geraden g liegen. Die Gerade g ist jedoch nicht vollständig definiert. Ihre Steigung könnte z.B. unbekannt sein. Es könnte auch sein, dass die Lage des Punkts nicht eindeutig definiert ist. Man macht dann formal eine Punktprobe und passt Parameter in der resultierenden Gleichung so an, dass die Gleichung stimmt, d.h. dass P auf g liegt.

11.3. Gegenseitige Lage von zwei Geraden

g_1 und g_2 sind parallel, d.h. $g_1 \| g_2 \rightarrow m_1 = m_2$ (gleiche Steigung)

g_1 und g_2 stehen senkrecht aufeinander, d.h. $g_1 \perp g_2 \rightarrow m_2 = -1/m_1$

11.4. Gerade durch zwei Punkte

Für $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$, $\{A,B\} \in g$ kann man mit der Zwei-Punkte-Form die Geradengleichung direkt erhalten oder man kann mit der Steigungsformel zunächst die Steigung bestimmen und danach den y-Achsenabschnitt q mit einer inversen Punktprobe berechnen.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \rightarrow q = y_A - m \cdot x_A \text{ oder } q = y_B - m \cdot x_B$$

11.5. Schnittpunkt von zwei Geraden

Von zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2 seien die Gleichungen in Normalform gegeben. (Falls die Geradengleichungen nicht in Normalform gegen sind müssen sie in die Normalform gebracht werden). Durch Gleichsetzen der y-Werte erhält man eine Gleichung mit nur noch der Variablen x.

$$\text{Es sei } g_1\text{: } y = m_1 \cdot x + q_1 \text{ und } g_2\text{: } y = m_2 \cdot x + q_2 \rightarrow x_S = -\frac{q_1 - q_2}{m_1 - m_2} \rightarrow$$

$$y_S = m_1 \cdot x_S + q_1 \text{ oder } y_S = m_2 \cdot x + q_2$$

12. Lineare Gleichungssysteme (2×2 – System)

$$\left| \begin{array}{l} a \cdot x + b \cdot y = c \\ d \cdot x + e \cdot y = f \end{array} \right|$$

Cramersche Regel (mit Determinanten)

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - d \cdot b \text{ , } D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c \cdot e - f \cdot b \text{ , } D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a \cdot f - d \cdot c$$

Dann gilt $x = \frac{D_x}{D}$ und $y = \frac{D_y}{D}$, falls $D \neq 0$

Fallunterscheidung:

- Eine eindeutige Lösung, wenn $D \neq 0$
- Unendlich viele Lösungen, wenn $D = D_x = D_y = 0$
- Leere Menge (keine Lösung!), wenn $D = 0$, jedoch $D_x \neq 0$ und/oder $D_y \neq 0$

12.1. Lineare Gleichungssysteme von Funktionen

Bei einem linearen Gleichungssystem von Funktionen, z.B.

$$\left| \begin{array}{c} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 8 \\ 2\sqrt{x+y} - 3\sqrt{x-y} = 1 \end{array} \right|$$

löst man zuerst nach den Funktionswerten auf, hier $\sqrt{x+y}$ und $\sqrt{x-y}$ und danach nach den eigentlichen Lösungsvariablen x und y. Für die Funktionswerte werden meist Substitutionsvariablen verwendet. Hier z.B. $u = \sqrt{x+y}$ und $v = \sqrt{x-y}$. Beim obigen Beispiel erhält man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen $u + v = 8$ und $2u - 3v = 1$.

13. Stückweise definierte lineare Funktionen

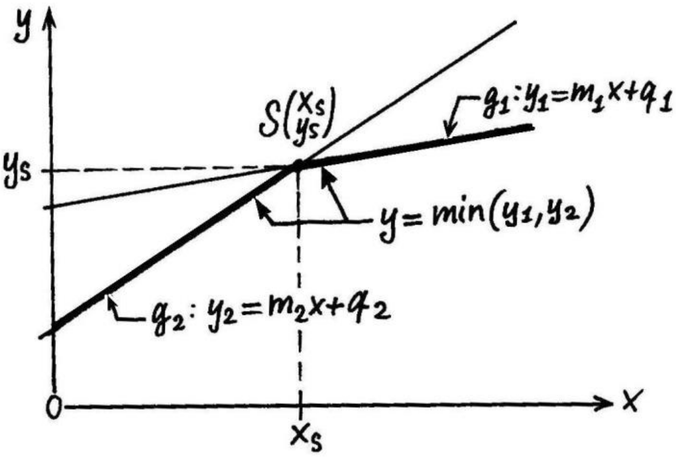
Kennzeichen: Funktionen mit unterschiedlichen Funktionsgleichungen für verschiedene Definitionsbereiche, z.B.

$$y = \begin{cases} m_1 \cdot (x - x_s) + y_s & \text{für } x \le x_s \\ m_2 \cdot (x - x_s) + y_s & \text{für } x > x_s \end{cases}$$

Beispiel: Die Geraden g_1 und g_2

g_1: $y_1 = m_1 \cdot x + q_1$
g_2: $y_2 = m_2 \cdot x + q_2$

schneiden sich im Punkt $S(x_s | y_s)$ und es soll gelten $y = \min(y_1, y_2)$.



In diesem Kontext ist die Punkt-Steigungsform der Geradengleichung häufig sehr nützlich.

14. Zinsrechnung und lineare Abschreibung

K: Kapital (Guthaben)
p: Zinssatz (Zinsfuss)
n: Anzahl Zinsperioden

Jahreszins: $Z = \dfrac{K \cdot p}{100}$

Kontostand eines ruhenden Kontos nach n Zinsperioden mit einfacher Verzinsung:

$$K_n = K_o \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$$

Aufzinsfaktor: $q = 1 + \dfrac{n \cdot p}{100}$

Marchzins: $Z_M = \dfrac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ t = Zeit in Tagen

$Z_M = \dfrac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ t = Zeit in Monaten

Zinseszins: $K_n = K_o\, q^n = K_o \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$, hier $q = 1 + \dfrac{p}{100}$

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_o}} - 1\right) \quad \text{und} \quad n = \frac{\log(K_n / K_o)}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Gleichstand von zwei Konten: Es sei $K_{n1} = K_{o1}\, q_1^n = K_{n2} = K_{o2}\, q_2^n \;\rightarrow\; n = \dfrac{\log(K_{o1}/K_{o2})}{\log(q_2/q_1)}$

Lineare Abschreibung: Restbuchwert nach k Abschreibungsperioden:

$$y_k = y_o - k \cdot A = \frac{y_o(n-k) + k \cdot y_n}{n}$$, wobei

y_o = Anschaffungswert, y_n = Restwert (nach Nutzungsdauer) und n = Nutzungsdauer, p = Abschreibungssatz = $(A/y_o) \cdot 100$, A = Abschreibungsbetrag pro Abschreibungsperiode = $(y_o - y_n)/n$

15. Quadratische Gleichungen

Allgemein: $ax^2 + bx + c = 0$

15.1. Lösungsformel

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Anzahl Lösungen: Zwei Lösungen, falls $D > 0$
Eine Lösung, falls $D = 0$
Keine Lösung, falls $D < 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

15.2. Zerlegung in Linearfaktoren

Es gilt $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Dabei sind x_1 und x_2 Lösungen (Wurzeln) der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

16. Quadratische Funktionen

Koordinatengleichung

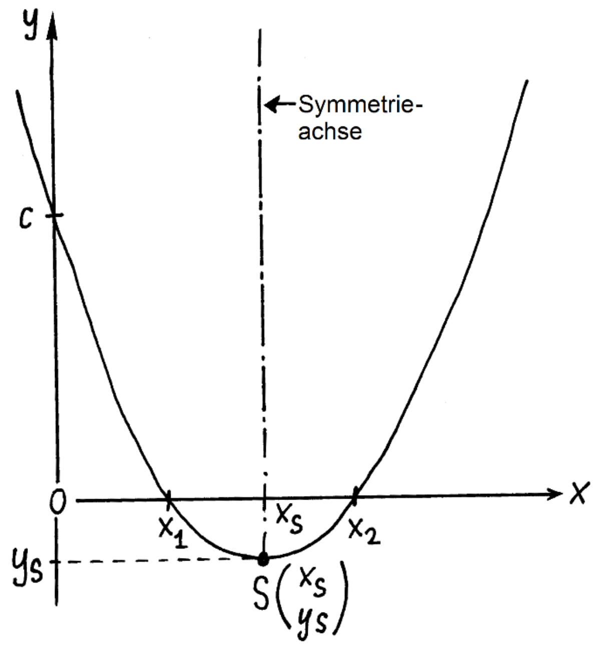
p: $y = ax^2 + bx + c,\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$

a: Formfaktor: Parabel ist nach oben geöffnet, wenn $a > 0$. Falls $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

Scheitelpunkt:

$$S\left(\frac{-b}{2a} \,\middle|\, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$x_S = -b/(2a)$
$y_S = c - b^2/(4a)$



Nullstellen: Schnittpunkte des Graphen (Parabel) mit der x-Achse.

p: $y = ax^2 + bx + c \;\rightarrow\; x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, wobei $D = b^2 - 4ac$ (Diskriminante)

Symmetrie: Vertikale Symmetrieachse durch den Scheitelpunkt. Daher gilt $x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Scheitelpunktform: p: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

Nullstellenform: p: $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

16.1. Schnittpunkte mit einer Geraden

Parabel: p: $y = ax^2 + bx + c$
Gerade: g: $y = m \cdot x + q$

$p \cap g$ führt zu einer quadratischen Gleichung $ax^2 + (b - m) \cdot x + c - q = 0$

16.2. Schnittpunkte von zwei Parabeln

Parabel 1: p_1: $y = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$
Parabel 2: p_2: $y = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$

$p_1 \cap p_2$: $(a_1 - a_2) \cdot x^2 + (b_1 - b_2) \cdot x + c_1 - c_2 = 0$ quadratische Gleichung mit Lösungen x_1 und x_2. p_1 und p_2 schneiden sich bei $S_1(x_1 | y_1)$ und $S_2(x_2 | y_2)$.

16.3. Verschiebung einer Parabel (in der Scheitelpunktform)

Verschiebungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$:

Scheitelpunktform: $S\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \rightarrow S'\begin{pmatrix} x_o + v_x \\ y_o + v_y \end{pmatrix}$ und p: $y = a \cdot (x - x_o)^2 + y_o \rightarrow$ p': $y = a \cdot (x - x_o - v_x)^2 + y_o + v_y$

Normalform: p: $y = a \cdot x^2 + b\,x + c \rightarrow$ p': $y = a \cdot (x - v_x)^2\; b \cdot (x - v_x) + c + v_y$

16.4. Normalparabel durch zwei Punkte

$P_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $P_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in$ p: $y = x^2 + b\,x + c \rightarrow b = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - x_1 - x_2$ und $c = \dfrac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{x_1 - x_2} + x_1 \cdot x_2$

17. Quadratische Ungleichungen

Bei quadratische Ungleichung wie z.B. $ax^2 + bx + c > 0$ muss man zunächst die Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ bestimmen. Die Zahlenachse wird durch Lösungen der Gleichung in verschiedene Bereiche unterteilt (maximal drei) in welchen die Ungleichung entweder gilt oder nicht gilt. Bestimmung durch „Probe"!

18. Logarithmen

Notation: $\log_b x$, b ist die Basis des Logarithmus. Es muss $b > 0$.

Definitionsbereich: $\log_b x \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, d.h. es muss $x > 0$

Die Logarithmusfunktion, $y = \log_b x \rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x = b^y$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$$\log_b x = c \ (b > 0, b \neq 1) \ \Leftrightarrow \ x = b^c$$

Zehnerlogarithmen (b = 10)

Notation: $\log_{10} x = \lg x$

Umkehrfunktion von 10^x. Es gilt $10^{\lg x} = x$ und $\lg(10^x) = x$

18.1. Logarithmengesetze

Die nachfolgenden Logarithmengesetze sind unabhängig von der Basis

Produktregel: $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$

Quotientenregel: $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

Potenzregel: $\log a^x = x \cdot \log a$

Potenzregel für Wurzel: $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log x$

18.2. Entlogarithmieren für Zehnerlogarithmen

$\log_{10} x = a \ \rightarrow \ x = 10^a$

18.3. Logarithmengleichungen

Falls es in der Gleichung mehrere Logarithmen hat, sollte man versuchen, diese mithilfe der Logarithmengesetze zu einem einzigen Logarithmus zusammen zu fassen. Danach entlogarithmieren (gemäss $\log_{10} a = c \ \Leftrightarrow \ 10^c = a$). Wegen möglichen Scheinlösungen am Schluss stets Probe machen.

19. Exponentialgleichungen

19.1. Exponentialgleichungen mit ausschliesslich Punktoperationen

Bei dieser Art von Gleichung kann man häufig durch beidseitiges Logarithmieren, unter Anwendung von Logarithmengesetzen, die Lösungsvariable extrahieren.

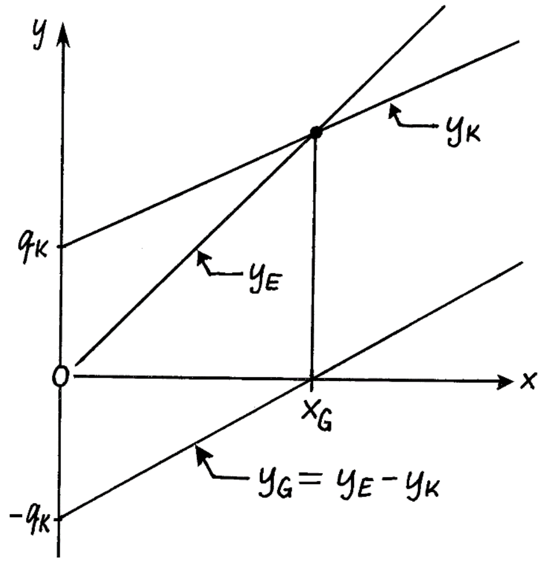
19.2. Exponentialgleichungen mit Strichoperationen

Weil es keine Logarithmengesetze für Strichoperationen gibt, kann man nicht einfach beide Seiten logarithmieren. Zuerst versuchen, ob man eine Potenz ausklammern kann. Wenn das nicht geht, für Potenzen eine Substitution vornehmen und schauen, ob man die resultierende Gleichung nach der Substitutionsvariablen auflösen kann. Falls dies zum Erfolg führt, die gefundenen Lösungen für die Substitutionsvariable logarithmieren.

19.3. Degressive Abschreibung

$B_n = B_o \cdot q^n$ und $B_o = \frac{B_n}{q^n}$, wobei $q = 1 - \frac{p}{100}$, p = Abschreibungssatz, B_o = Anschaffungspreis, B_n = Buchwert. $p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[n]{\frac{B_n}{B_o}}\right)$ und $n = \frac{\log(B_n / B_o)}{\log\left(1 - \frac{p}{100}\right)}$. $B_n = B_o\left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$, $q = \sqrt[n]{\frac{B_n}{B_o}}$

20. Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion



Kostenfunktion: $y_K = m_K \cdot x + q_K$

Erlösfunktion: $y_E = m_E \cdot x$

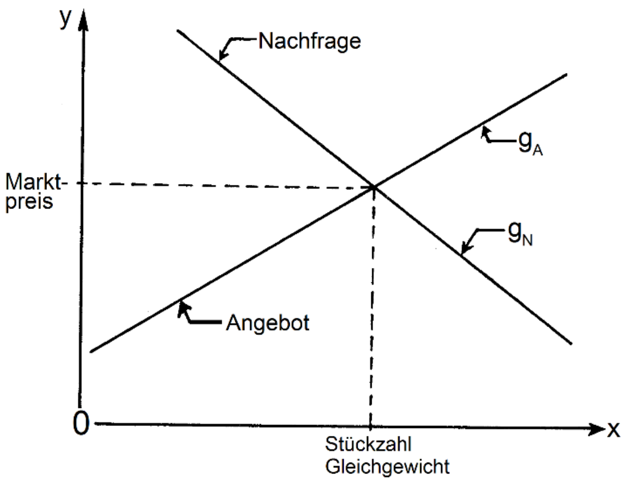
Gewinnfunktion: $y_G = y_E - y_K = (m_E - m_K) \cdot x - q_K$

Gewinnschwelle: $x_G = \dfrac{q_K}{m_E - m_K}$

Verwendete Symbole:

- x = Stückzahl
- m_K = Stückkosten bei der Herstellung
- $m_K \cdot x$ = variable Kosten
- q_K = Fixkosten
- m_E = Stückpreis beim Verkauf
- x_G = Stückzahl an der Gewinnschwelle (wo $y_K = y_E$, resp. $y_G = 0$)

21. Marktgleichgewicht, Preisbildung



x: Stückzahl

y: Preis

Angebotsfunktion:

$$g_A\colon y_A = m_A \cdot x + q_A$$

Nachfragefunktion:
(Preis-Absatz-Funktion, Monopolist)

$$g_N\colon y_N = -\, m_N \cdot x + q_N$$

Stückzahl beim Marktgleichgewicht:

$$x_M = \frac{q_N - q_A}{m_A + m_N}$$

Marktpreis:

$$y_M = \frac{m_A\, q_N + m_N\, q_A}{m_A + m_N}$$

22. Datenanalyse

Stichprobenumfang: Anzahl Elemente in einer Stichprobe (n)

Geordnete Liste: Elemente einer Stichprobe werden nach einer quantitativen Ausprägung geordnet, meist aufsteigend.

Geordnete Halbliste: Geordnete Liste in zwei Hälften aufgeteilt. Für ungerade n wird das Element in der Mitte beiden Listen zugeordnet.

Median: (Zentralwert). Für ungerade n ist der Median gleich dem Element in der Mitte der geordneten Liste

$$M_e = x_{(n+1)/2}$$

Für gerade n ist der Median gleich dem arithmetischen Mittel der zwei Werte in der Mitte der geordneten Liste.

$$M_e = \frac{x_{n/2} + x_{(n+2)/2}}{2}$$

Modus (Modalwert): Häufigster Wert in der Stichprobe

1. Quartil: Median der unteren geordneten Halbliste

2. Quartil: Wird als Median bezeichnet

3. Quartil: Median der oberen geordneten Halbliste

Interquartilsabstand: (Quartilsdifferenz). Die Differenz zwischen dem 3. Und dem 1. Quartil

Modus: Häufigster Wert in der Stichprobe. Wenn Werte in der Stichprobe gleich häufig vorkommen ist der Modus eventuell nicht eindeutig

Mittelwert: Arithmetisches Mittel aller Werte in der Stichprobe:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

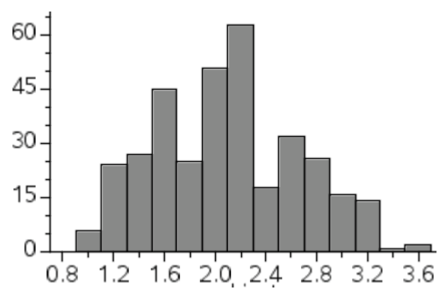
Standardabweichung: $$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_n - \mu)^2}{n - 1}}$$

Varianz: Das Quadrat der Standardabweichung: Varianz = σ^2

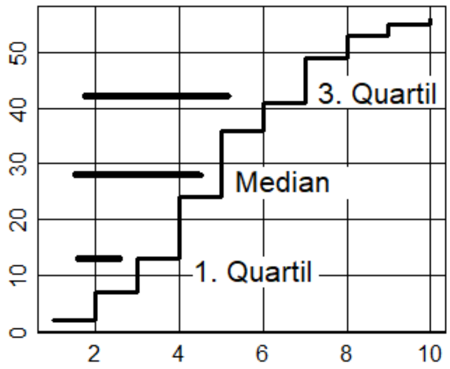
Klasseneinteilung: Einteilung der Elemente einer Stichprobe in Gruppen entsprechend Intervallen für eine Ausprägung. Meist ist die Klassenbreite konstant.

Relative Häufigkeit: Anteil der Elemente einer Klasse an der Gesamtzahl der Elemente der Stichprobe. (Meist in Prozent angegeben).

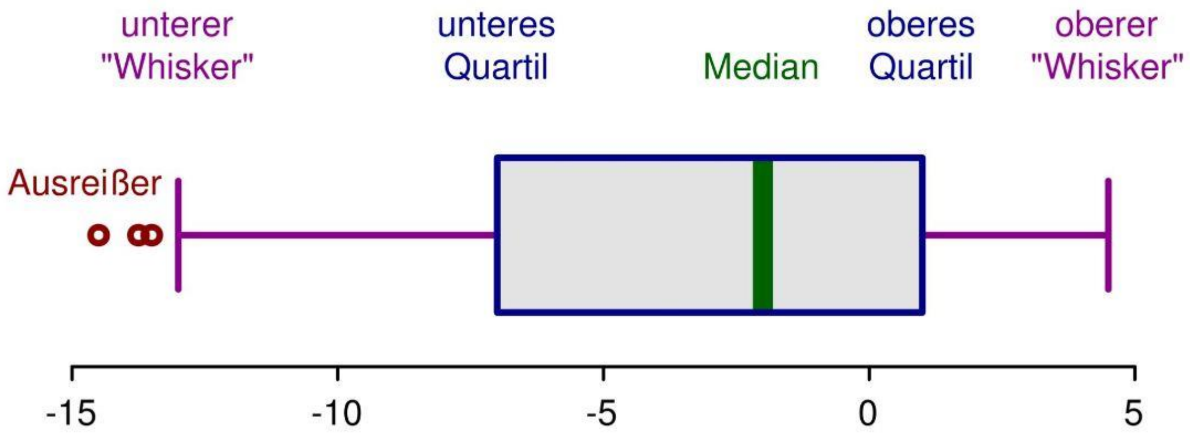
Histogramm: Balkendiagramm für die Häufigkeit einer bestimmten Ausprägung in einer Stichprobe. Im Allgemeinen ist eine Einteilung in Klassen erforderlich.



Kumulierte Häufigkeit: Die absolute Häufigkeit wird fortlaufend summiert.



Boxplot:



Modus: Häufigster Wert der Stichprobe.

Spannweite: Differenz zwischen dem grössten und dem kleinsten Wert in der Stichprobe.

Ausreisser: Elemente in der Stichprobe, die mehr als 1.5 Interquartilsabstände unterhalb vom ersten Quartil liegen oder mehr als 1.5 Interquartilsabstände oberhalb vom 3. Quartil.